

# 楽しい行列演算：図形を変形してみよう

## —高大連携授業実施報告—

### Attractive Matrix Algebra: Let's Transform Figures Geometrically

#### — Report of Cooperation Class of High-School and University —

下野 哲雄<sup>1</sup>, 白川 智昭<sup>2</sup>, 青柳 洋一<sup>3</sup>, 運上 喬仁<sup>3</sup>, 田邊 統久<sup>3</sup>

Tetsuo Shimonio<sup>4</sup>, Tomoaki Shirakawa<sup>5</sup>, Youichi Aoyagi<sup>6</sup>, Takahito Unjo<sup>6</sup>, and Munehisa Tanabe<sup>6</sup>

#### 要 旨

2012年度からスタートした高校数学の新課程では行列演算はほとんど扱われていない。そこで、東海大学付属第四高校1年生を対象に、行列の基本演算に関する授業を行った。この授業は生徒たちに行列演算に興味を持ってもらうこと及び行列演算の有用性を理解してもらうことを目的とした。行列の基本演算は簡単な例や演習問題を使って説明し、引き続き行列演算の応用の例として平面図形の拡大・縮小、回転や平行移動などの幾何学変換を取り上げた。これは計算結果を視覚的に理解してもらうためである。さらに、PCを用いて変換行列の違いにより画像がどのように変形するかを視覚的に捉えられるような授業も行った。

#### Abstract

Matrix algebra is not treated in new curriculum of high school's mathematics started from the 2012 physical year. Therefore, for the freshmen of Tokai University Senior High School, a class of the basic matrix algebra was performed. The aim of the class was for the students to get interest in matrix algebra and to understand the usefulness of matrices. The basic matrix algebra was illustrated using several easy examples and exercises, and then an example of application of matrix algebra was taken up geometrical transforms, such as translation, scaling and rotation, of planer figures, because of understanding the results visually. Furthermore, it had the class which understands visually how pictures change by various transform matrices using personal computers.

キーワード： 行列演算、図形の幾何学的変形、高大連携授業

<sup>1</sup> 東海大学生物理工学部生体機能科学科、005-8601 札幌市南区南沢5条1丁目1-1

<sup>2</sup> 東海大学生物学部生物学科、005-8601 札幌市南区南沢5条1丁目1-1

<sup>3</sup> 東海大学付属第四高等学校、005-8602 札幌市南区南沢517-1-1

<sup>4</sup> Department of Human Science and Informatics, School of Biological and Engineering, Tokai University, 5-1-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo, 005-8601, Japan

<sup>5</sup> Department of Biology, School of Biological Science, Tokai University, 5-1-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo, 005-8601, Japan

<sup>6</sup> Tokai University Daiyon Senior High School General Studies, 517-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo, 005-8602, Japan

**Keywords:** Matrix Algebra, Geometric Transform of Figures, Cooperation Class of High-School and University

## 1. はじめに

本学生物理工学部生体機能科学科と東海大学付属第四高等学校数学科との間で過去4回にわたり数学に関する高大連携授業を実施してきた。内3回はSPP(サイエンスパートナーシッププロジェクト)として実施した。取り上げる内容は、本学科教員と付属第四高等学校数学科の教諭と綿密な検討を重ねて決めてきた。今まで実施してきたテーマは、多くの高校生が苦手とする「三角関数」「確率」「位相幾何学」「 $\pi$ 」である。

2012年度からスタートした高校新課程から行列演算がほとんど消滅し、新入生からは行列演算に触れずに卒業することとなる。多くの生徒は大学に進学し、そこで初めて行列を学ぶことになり、進学分野によっては不安を感じる可能性がある。このような背景の下に、今年度は1年生の生徒39名を対象として、最大 $3 \times 3$ の行列までの的を絞り、本課程では学ばない行列演算規則の理解と行列の有用性の実感を目的として、連携授業を企画した。授業は2012年9月12日及び13日の2日間、東海大学札幌校舎N504教室及びM802PC実習室において各100分の授業を行った。1日目は下野が、2日目は白川が主講師を務め、青柳、運上並びに田邊は両日とも副講師を務めた。

## 2. 授業内容

本授業は、「楽しい行列演算—図形を変形してみよう—」のタイトルで実施した。1日目は、行列の簡単な例を取り上げ、それをもとに演算規則の解説を行った。また、生徒の理解を深めるため、演習問題を多数用意した。引き続き、二次元図形の三角形の変形を例にとり、各頂点の変形後の座標は行列の積演算で得られることを説明し、変換行列と変形後の図形を目に見える形で示した。2日目は、PCを用いて文字図形やカラー画像を例として、変換行列の係数を与えることでそれに従った変形ができること、逆に変形図形を示して、それに必要な変換行列を考えさせること、などを行い行列演算の楽しさや有用性を実感できるよう授業運営を工夫した。以下に、授業の詳細を述べる。

### 2.1 1日目

(1) まず行列とは何かを表1の例を使い、複数の数値をまとめたものであることを示した。またそれを行列で表わすと式(1)のように書くことを説明した。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 35 & 90 \\ 75 & 80 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(2) 表2の行列を $\mathbf{B}$ としたとき、総合成績(表3)を得る演算が行列 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の加算演算であることを説明した。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 90 & 95 \\ 60 & 85 \end{pmatrix} \quad (2)$$

表 1. 行列の例-1

中間試験	英語	数学
太郎君	35	90
花子さん	75	80

表 2. 行列の例-2

期末試験	英語	数学
太郎君	90	95
花子さん	60	85

表 3. 行列の例-3

総合成績	英語	数学
太郎君	125	185
花子さん	135	165

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 35 & 90 \\ 75 & 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 & 95 \\ 60 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 185 \\ 135 & 165 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(3) 行列の積演算は次のような例で示した。

太郎君も花子さんもお祖父ちゃんから貰えるお年玉は、総合成績の英語の点数に 20 円、数学の点数に 35 円をかけた分と決まっているとすると、太郎君のお年玉は、 $125 \times 20 + 185 \times 35 = 8975$  円、花子さんのお年玉は、 $135 \times 20 + 165 \times 35 = 8475$  円である。この計算を実現するのが行列の積である。各科目の一点あたりのお年玉の額を 2 行 1 列の行列  $m$  で表わす。

$$m = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \end{pmatrix} \quad (4)$$

それぞれのお年玉の額を求める演算が行列の積である。

$$C \cdot m = \begin{pmatrix} 125 & 185 \\ 135 & 165 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \times 20 + 185 \times 35 \\ 135 \times 20 + 165 \times 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8975 \\ 8475 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(2×2)行列に(2×1)行列を掛けると(2×1)行列ができる。(2×2)行列と(2×2)行列の積は次のようになる。

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} \end{pmatrix}$$

さらに、普通の積演算と違い行列の積は掛ける順番が異なると結果は異なってくること、すなわち、 $A \cdot B \neq B \cdot A$  にも言及した。

(4) ゲームや SFX を駆使した映画などで活躍する CG の話をしてから、図 1 の三角形の平行移動を式 (7) の同次座標形式による行列の積で表現できることを説明した。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

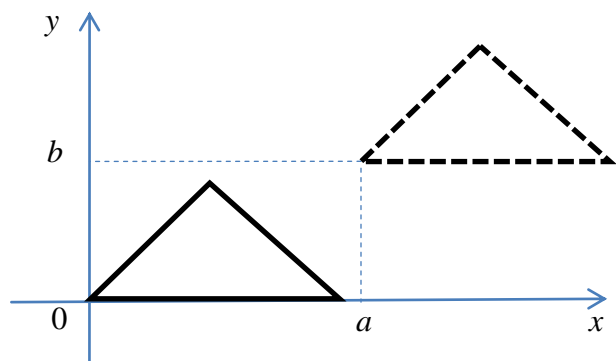


図 1 図形の平行移動

続いて、対称変換や拡大縮小、回転、スキュー（平行四辺形変形）などの例を示した。

また、複数の変形を行う場合は、対応する変換行列を左から順に掛けることで実現できることを示した。

それぞれの説明と同時に、説明されたことの確認のために全部で 12 題の簡単な演習問題を出した。時間の制約があり、解いた問題は平均的には 6 問程度であっ

た。

【演習問題の例-1】 二つの行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  に対して、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  を求めなさい。

【演習問題の例-2】 与えられた図形に対してそれぞれの変換行列を示しなさい。

- (1)x 軸方向に 45 度のスキュー変形を行う。なお、 $\tan(45^\circ) = 1$  です。
- (2)x 軸方向を 0.5 倍、y 軸方向を 2 倍の変形を行う。
- (3)図形を  $-90$  度回転する。なお、 $\cos(-90^\circ) = 0$ ,  $\sin(-90^\circ) = -1$  です。
- (4)図形を点(2, 2)の位置に平行移動する。

1 日目の授業の様子を図 2 及び 3 に示す。



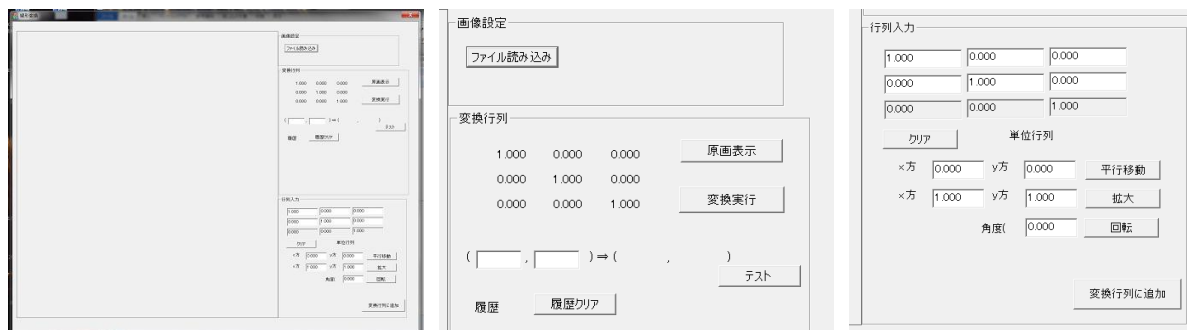
図 2 演習問題に取り組む生徒の様子



図 3 図形の対称変換の説明の様子

## 2.2 2 日目

二日目は PC を使って、変換行列の係数と画像の変形の関係をより視覚的に捉えてもらうことを目的に実施した。ソフトウェアは Visual Basic で作成し、図 4 に示すように、画像ファイルの読み込み、変換の種類を選択、変換行列要素の直接入力、複数の変換の連続的操作、その逆トレース、変換前後の画像の表示ができる機能を持たせた。画像は線図形、平面図形、カラー画像、文字画像等を用意した。



(a) PC 入力画面

(b) 入力画面の拡大-1

(c) 入力画面の拡大-2

図 4 PC の入力画面

授業は 1 日目の復習を行ってから、具体的に変換を指定すること（下に練習問題を示す）で

それに対応する行列要素を直接入力し、その結果を見ることから始めた。

【練習問題 1】プログラム「線形変換.exe」を用いて実際に画像を線形変換してみよう。また、直線からなる画像 (line.jpeg) を線形変換することで、直線を線形変換すると直線になることを確かめてみよう。

- (1)  $x$  方向に 50、 $y$  方向に  $-40$  の平行移動
- (2)  $x$  方向に 1.2 倍、 $y$  方向に 0.6 倍の拡大
- (3)  $x$  方向に  $-1.2$  倍、 $y$  方向に 0.6 倍の拡大 ((2)の結果と比べてみよう)
- (4) 原点を中心とした  $60^\circ$  の回転 ( $\cos 60^\circ = 0.5, \sin 60^\circ = 0.8660$ )
- (5)  $x$  方向に  $45^\circ$  のスキュー変換 ( $\tan 45^\circ = 1$ )
- (6)  $y$  方向に  $30^\circ$  のスキュー変換 ( $\tan 30^\circ = 0.5774$ )

次に、従続的に変換を繰り返した場合どのように画像が変換されるかを下に示す練習問題で体感してもらった。

【練習問題 2】画像に次のような変換をしてみよう。途中経過も表示し、変換が正しく行われていることを確認しよう。

- (1) 原点の周りに  $45^\circ$  回転後、 $x, y$  方向にそれぞれ 1.05、0.95 倍に拡大し、さらに原点の周りに  $-45^\circ$  回転する。
- (2) 原点の周りに  $10^\circ$  回転後、 $x, y$  方向にそれぞれ(50, -20)平行移動し、さらに原点の周りに  $10^\circ$  回転後、 $x, y$  方向にそれぞれ 0.8、0.9 倍に拡大し、最後に原点の周りに  $-20^\circ$  回転する。

次に、図 5 に示すように画像を与えて必要な変換行列を考える問題 (練習問題 3) に取り組んだ。

【練習問題 3】(1)の画像(yonkou.jpg、256×256 画素)から(2)、(3)、(4)の画像を作るためにはどのような変換を組み合わせればよいかを考え、実行してみよう。また、その変換を用いて他の画像の変換を行おう。

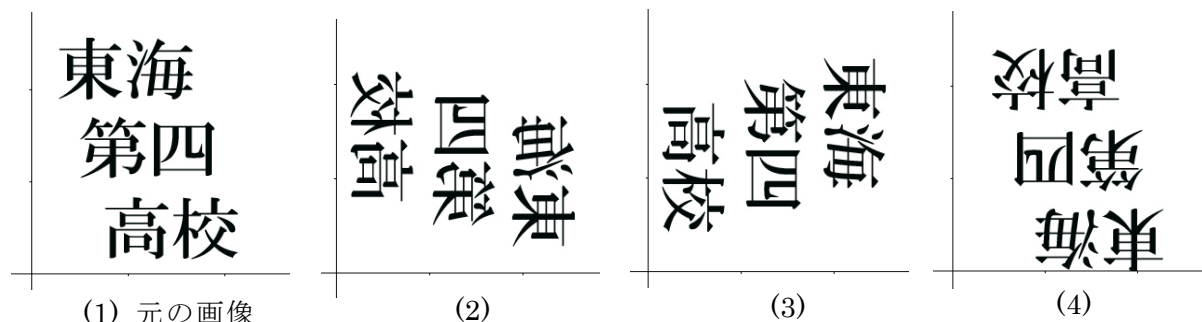


図 5 変換の順番を考える例

この練習問題では、変換の順番が一通りではないので、生徒同士がやり方を話し合っ、お互いに方法の評価を行っていたのが印象的であった。

最後に、正三角形を原画像にして、3 頂点を指定した座標へ変換するのに必要な変換行列の要素を求めることに挑戦した。これは、二組の 3 元 1 次連立方程式を解くことで要素を求めることができることを説明し、実際に方程式を解いてもらったが、時間の制約があり、残念ながら解けた生徒は一割程度であった。

二日目の授業の様子を図 6、7 に示す。



図 6 PC を用いた実習の様子-1



図 7 PC を用いた実習の様子-2

### 3. アンケート結果とまとめ

この授業後、受講生徒 39 名にアンケート調査を行った。授業内容に関するアンケート項目と結果を示す。

Q1. 授業内容は興味がわく内容でしたか？

- |                |       |
|----------------|-------|
| ① 興味がわいた       | 20.5% |
| ② 少し興味がわいた     | 56.4% |
| ③ どちらともいえない    | 20.5% |
| ④ あまり興味がわかなかった | 2.5%  |
| ⑤ 興味がわかなかった    | 0.0%  |

Q2. 授業内容を理解することができましたか？

- |               |       |
|---------------|-------|
| ① 理解できた       | 2.6%  |
| ② 少し理解できた     | 38.5% |
| ③ どちらともいえない   | 15.4% |
| ④ あまり理解できなかった | 35.9% |
| ⑤ 理解できなかった    | 7.7%  |

Q3. 授業を受講して、数学に対する興味や関心は以前に比べて、どのように変化しましたか？

- |                    |       |
|--------------------|-------|
| ① 興味・関心度が増加した      | 5.1%  |
| ② 少し興味・関心度が増加した    | 46.2% |
| ③ あまり変わらない         | 41.0% |
| ④ あまり興味・関心度が少し減少した | 7.7%  |
| ⑤ 興味・関心度がなくなった     | 0.0%  |

Q4. 授業を受講して、数学を好きになりましたか？それとも嫌いになりましたか？

- |             |       |
|-------------|-------|
| ① 好きになった    | 5.1%  |
| ② 少し好きになった  | 23.1% |
| ③ どちらともいえない | 61.5% |
| ④ 少し嫌いになった  | 7.7%  |
| ⑤ 嫌いになった    | 2.6%  |



その他に自由に感想を書いてもらった。いくつかを下に示す（原文通り）。

- ・正直にひと言で言うと「難しかった」です。最初は何を言っているかもわからない感じでしたが、2日目のコンピュータを使った授業で大分理解できたところもあり“楽しい”と思う部分もありました。下野先生、白川先生ありがとうございました！！
- ・内容はすごくむずかしかったけれどわかったときのうれしさがたまらなかったです。また機会があればこのような授業をうけてみたいです。
- ・今回、初めて高大連携授業があると聞き、とても楽しみでした。自分たちのクラスしか受けることができないし、とても貴重な体験でした。内容はとても難しかったけれど、その分問題が解けた時の達成感とかも大きくなりました。新しい発見が多くあった2日間はとても良かったです！
- ・たくさん頭をつかう問題があっっておもしろかった！図形なので説明などもわかりやすくよかったです。もう少し数学を受講したいと思いました。

アンケート結果からは、この授業テーマに対する興味、数学への関心という部分では肯定的に捉えている生徒が多かったことがわかる。しかし、授業内容の理解（Q2）や数学が好きになったかどうか（Q4）は中立や否定的意見が多く、肯定的評価が60%以上であることを期待していたが、実際には40%程度であった。これは、1日目の授業進行が少し早く、授業内容を理解するための演習問題をしっかり行う時間がなかったことが全体的な理解不足につながってしまったためと思われる。

本連携授業を通して得られたことを以下に述べる。

- (1) 高校一年生にとって未知の内容の行列演算であっても、分かりやすい例を挙げて説明することで理解は得られる。
- (2) 理解を深めるために、単なる計算だけでなく計算結果が図形の変形など、視覚的に理解できるような工夫は有効である。
- (3) PCを用いてより現実的な画像や文字図形などの変形を練習問題として取り上げること、生徒の興味を引く大きな一助とする。
- (4) テーマ選択に当たっては、対象学年の高校生が何を希望しているか、何を取り上げればその後の授業運営に良い影響を及ぼすかを高校側は大学側に十分に伝えるなど、大学側教員と高校側教諭との間で十分に検討する必要がある。
- (5) 対象学年を良く考えた授業のスピード、分かりやすい例の選択、演習問題の難易度や量及びそれにかかる時間などを十分に検討する必要がある。
- (6) 本授業前に大学側教員が高校側教諭の前で模擬授業を行い、授業のスピードや展開方法をチェックするなどの工夫をすることでさらに連携授業の効果が上がるとと思われる。

## 参考文献

文部科学省（2012）、高等学校学習指導要領解説

<[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/1282000.htm](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/1282000.htm)>

（受付：2013年1月29日，受理：2013年2月25日）