どこまで求められる？ 円周率

―SPP 実施報告―

Circular Constant: How Many Digits Can You Calculate?

―― SPP Report ――

上野　由以[1]，鈴木　康平[2]，白川　智昭[1]，下野　哲雄[1]，
青柳　洋一[3]，運上　喬仁[3]，田辺　統久[3]

Yui Ueno[4], Kouhei Suzuki[5], Tomoaki Shirakawa[4], Tetsuo Shimono[4],
Youichi Aoyagi[6], Takahito Unjo[6], and Munehisa Tanabe[6]

要 旨

円周率の概念は小学校で教えられるが，具体的な値については 3.1，3.14 といった数値が示されるのみで，値の計算法について教えられることはほとんどないように感じられる。そこで，SPP（サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト）によって，円周率計算法の歴史的な順番に従った説明と，それを用いて実際に円周率の値を計算する実習からなる授業を行った。この授業を通じて，円周率が「円」以外の様々なところで利用されていること，数学の発展が計算される円周率の桁数に大きく貢献していることの理解を目指した。

Abstract

Although the concept of the circular constant π and its approximated value 3.14 or 3.1 are learned at elementary schools in Japan, many students have not learned how to calculate the value of π at schools following. In the SPP(Science Partnership Project) program, we focused on the relation between various algorithms for the calculation of π and the number of digits given by these algorithms. The students who took the program have known the history about the calculation method of π and have understood the progress of mathematics contributing to the increase in the number of digits of π.

キーワード：　サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト，円周率，計算アルゴリズム
Keywords: SPP(Science Partnership Project), Circular Constant, Calculating Algorithm

1. SPP とは

SPP（サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト）とは，児童生徒の科学技術，理科，数学に対する興味・関心と知的探求心を育成するとともに，進路意識の醸成及び分厚い科学技術関係人材層の

[1] 東海大学生物理工学部生体機能科学科，005-8601 札幌市南区南沢 5 条 1 丁目 1-1
[2] 東海大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻，005-8601 札幌市南区南沢 5 条 1 丁目 1-1
[3] 東海大学付属第四高等学校，005-8602 札幌市南区南沢 517-1-1
[4] Department of Human Science and Informatics, School of Biological and Engineering, Tokai University, 5-1-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo 005-8601, Japan
[5] Course of Electronic and Information Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Tokai University, 5-1-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo 005-8601, Japan
[6] Tokai University Dai-yon Senior High School, 517-1-1 Minamisawa, Sapporo 005-8602, Japan

形成を目的として，学校等と大学・科学館等との連携により，科学技術，理科，数学に関する観察，実験，実習等の体験的・問題解決的な学習活動を支援する JST（科学技術振興機構）主管のプロジェクトである〔科学技術振興機構 2011〕。今年度は，東海大学第四高校との間での数学分野での SPP が採択され，2011 年 9 月 14 日～16 日の 3 日間，東海大学札幌校舎 N611 室において各 100 分の授業を行った。本稿は，その実施報告である。授業では，白川が主講師，下野が副講師，鈴木と上野が TA を務めた。

2. 授業内容

本授業は，「どこまで求められる？円周率」という題目のもと，小学校から慣れ親しんでいる円周率（π）の値を具体的に計算するための各種手法〔ジャン=ポール・ドゥラエ 2001〕を歴史的な順番に従って説明し，実際に計算，実験等を行うことを目的としている。さらにこの授業を通して，円周率が「円」以外の様々なところで利用されていること，計算される円周率の桁数は数学の発展と密接に関連していることを理解してもらいたいという希望のもとに授業内容の検討を行った。今回対象となった生徒は東海大学第四高校（札幌市）の 1 年生で，34 名が参加した。実験，計算の多くは，全体を 5 名ずつ 7 つのグループに分け，このグループごとに行った。

授業を始める先立ち，円周率についての基本的な事項を確認するために事前課題を配布し当日までに調べておくように指示した。事前課題の問題を次に示す。

Q1 円周率とはなんですか。

Q2 円周率が定数であることはどれくらい昔から知られていたのでしょうか。

Q3 円周率にはなぜπの文字がつかわれているのでしょうか。

Q4 円の半径を r としたとき，円周の長さ，円の面積はどのように計算できますか。

Q5 球の半径を r としたとき，球の表面積と体積はどのように計算できますか。

Q6 円周率は有理数ではないことが知られています。有理数とはどんな数ですか。

Q7 有理数の小数表示はどのような性質を持っているでしょうか。

Q8 円周率以外に有理数ではない数の例を挙げてください。

Q9 実際に使用された証拠があるもっとも古い円周率の値とそれが使用されていた時代を調べてください。

Q10 7 月 22 日は「円周率近似値の日」です。それはなぜですか。

Q11 円周率を近似する分数の例をいくつか挙げてください。

Q12 あなたは円周率を何桁まで覚えていますか。

Q13 普通に生活していくためには，円周率は何桁くらい覚えていれば十分だと思いますか。

Q14 円周率を覚えるために考え出された語呂合わせにはどんなものがありますか。

Q15 現在の円周率の暗唱記録は何桁ですか。

Q16 現在のところ，円周率は小数点以下何桁まで計算されているでしょうか。

Q17 Q16 の計算は，誰がどのようなコンピュータを使って行ったものですか。

事前課題の解答は，1 日目の初めに生徒に発表をさせ，それに基づいて解説をした。

2.1 1 日目

・作図によりπを求める

1 日目の授業は, 西暦1600 年頃まで用いられていた作図的な方法によりπを求める方法を説明し,

実験を行った。

まず，定規とコンパスによる作図の基本として，これらを用いて角の二等分，線分の垂直二等分線を求める問題を出し，10 分程度の時間を取ってテキストに作図させた。その後，定規とコンパスで作図できるのは，2 次方程式を繰り返し用いて得られる範囲の数であることを説明し，実係数の 2 次方程式の解の公式で用いられる 2 数の和，差，積，商，実数の平方根を作図により求める方法を示した。また，この方法により実際に乗算，除算，平方根計算を作図により行い，線分の長さを定規で測ることにより，おおよそ正しい値は得られるがこの方法では精度に問題があることを確かめさせた。

次に，定規とコンパスでπの長さの線分を描けるかという問題を扱い，πの値を解とする有理数係数の代数方程式が存在しないことから，πの長さを直接的に作図することができないことを説明した。関連事項として，ギリシアの三大作図問題の内容と，それらがいずれも否定的に証明されていることを紹介した。さらに，近似的にπを作図する 2 つの方法を示した。この作図を実際に行わせる予定であったが，次の実験に十分な時間を確保するために説明のみにとどめた。

最後に，πの値に近づいてゆく数列を作図的に作成するアルキメデスの方法を説明し，実際に円に内接する正 6 角形から始めて，順次辺の数を倍にしてゆくことでπの近似値を求めさせた。作図は全員が別々に行ったが，実験結果はグループ内で平均を取り，その値を発表させた。15 分間の作図時間で多くの生徒は 24 角形まで描けていたが，一部の生徒は 48 角形までできていた。実験の結果求められたグループごとのπの値を表 1 に，実験の様子を図 1 に示す。その後，内接円と外接円を用いたより効率の良い方法〔吉田武 2000〕についての説明をした。

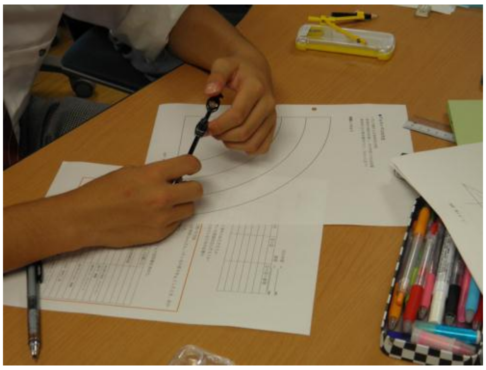

図 1.　実験の様子

表 1.　アルキメデスの方法によるπの近似値

グループ番号	πの近似値
1	3.098
2	2.102
3	3.152
4	3.185
5	3.022
6	3.058
7	3.146

2.2　2 日目

大きく 2 つのテーマでπの値を計算する実験を行った。「確率によるπの計算」では，生起確率にπを含む実験の結果からπの近似値を用いるもので，「ビュフォンの針」と「ランダムに選んだ 2 数が互いに素になる確率」の 2 つの実験を行った。「数列の和によるπの計算」では，結果がπの式で与えられるような無限級数の部分和によりπの近似値を用いるもので，「グレゴリー・ライプニッツの公式」と「マチンの公式」を用いた。後者の方法は現在でも用いられているが，この日の実験ではコンピュータが登場する 20 世紀中頃以前の計算法として考えたので，計算はすべて手計算（電卓は使用した）により行った。

・確率によるπの計算

間隔aで描かれた平行線の中に長さbの針を落とす時, それが平行線と交わる確率pは$(2b/a\pi)$となることを利用してπの近似値を求めるのが「ビョフォンの針」である。N回針を投げてそのうちn回平行線と交わったとすると，πの近似値は

$$\pi \sim \frac{2bN}{an} \tag{1}$$

で求められる。実験に先立ち，針はどんな形でもよいこと，1本の針が複数の平行線を横切る場合には横切った回数をカウントすることを話した。針としては，2種類の長さの爪楊枝およびUピンを準備し，グループごとにランダムに配布した。U ピンは自由に変形することを認めた。また，平行線を描いたA3用紙を平行線の間隔を変えて3種類用意し, それもグループごとにランダムに配布した。回数をカウントする際には，このA3用紙からはみ出た針については結果として採用しないように注意した。グループ内で針を投げる係と回数をカウントする係の組を2つ作り，5分間の実験を係を入れ替えて2回行った。結果はグループごとにまとめ，ホワイトボードに書かせた。実験の様子を図2に，実験の結果を表2に示す。

図2.　ビュフォンの針の実験の様子

表2. ビュフォンの針の実験結果

グループ番号	a [mm]	b [mm]	N	n	πの近似値
1	24.5	60	381	538	3.4686
2	38.5	50	429	356	3.1300
3	38	109	235	420	3.2099
4	51	109	199	274	3.1045
5	50	50	305	190	3.2105
6	26	60	205	358	2.6428
7	38	60	265	270	3.0994

第6グループ以外では良い結果を得ることができた。第6グループでは針の投げ方，a,bの計測法などに問題があったのかもしれないが，はっきりとした原因は不明である。全体の実験が終了したのち，過去に行われた大きな実験とそこで求められたπの近似値を紹介した。

次に,「でたらめに選んだ2つの自然数が互いに素である確率は$6/\pi^2$となる」を実際に確かめた。自然数の組は，自分と自分の右隣の人の誕生日をそれぞれ 4 桁の自然数とみなして作成した。それらが互いに素かどうかを確かめる方法として，ユークリッド互除法の説明をした。実験の結果，調べた自然数の組 66，うち互いに素だった組 36 となり，そこから計算される π の近似値は 3.32 となった。良い近似とは言い難いが，これだけ少ない組を使用しても大まかな π の値を見積もることができた。実験に関連して，同じ方式を用いて過去にπの近似値を求めた例について紹介した。

・数列の和による π の計算

歴史的にみると，前日行った「作図による π の計算」の後に，総和が π を用いて表せる無限数列が多数発見され，その有限項の和による π の近似値の計算が現在でも用いられているということを説明した。その代表例として，グレゴリー・ライプニッツの公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\cdots \tag{2}$$

を紹介し，初めの 30 項程度の部分和を電卓で計算することにより，どれくらいの速さでそれが π に近づくかを調べた。10 分ほどの計算時間を与えたところ，数名の生徒が 30 項まで計算でき，近似値 3.173 を得ていた。その他の多くの生徒は 15～20 項までしか計算できていなかった。実験の後，この公式は非常に収束が遅く，3.14 まで求めるのに約 200 項，3.1415 まで求めるのに約 20000 項の和を求める必要があることを説明した。なお，受講していた高校 1 年生はまだ数学で Σ を用いた総和の記述法を学習していなかったので，ここでそれを簡単に説明し，練習問題により理解を深めさせた。

次に，グレゴリー・ライプニッツの公式よりも収束の速い級数として，アークタンジェント公式を紹介した。生徒はアークタンジェント関数をまだ数学で学習していないので，ここでは級数による定義を与えた。なぜグレゴリー・ライプニッツの公式の収束が遅く，アークタンジェント公式の収束が早いのかを説明した後，具体例としてマチンの公式

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239} \tag{3}$$

を示した。この式の級数展開

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\cdot\left(\frac{16}{5^{2i+1}}-\frac{4}{239^{2i+1}}\right) \tag{4}$$

表 3.　マチンの公式による部分和

加える項数	そこまでの和
1	3.1832635983
2	3.1405972932
3	3.1416210293
4	3.1415917721
5	3.1415926824
6	3.1415926526

最初の数項から求められる部分和を電卓で計算し，表 3 のようにまとめた。

この結果より，1 項加えるごとにπの精度が約 1.33 桁ずつ上がってゆくこと, 従ってπの値を 1000 桁求めるには 750 項程度を用いればよいことを説明した。なお，この計算を電卓で行うのに苦労している生徒が多数みられた。簡単な四則計算しかできない電卓でこの計算を行うには,中間結果をいくつか記録しておく必要がある。また，関数電卓でも機種によって式の入力の方法が異なるため,普段あまり電卓による計算を行っていない生徒にとっては，難しすぎたのかもしれない。多くの生徒は，10 分で 2～3 項しか計算できていなかった。最後に，類似のいくつかの公式について，それが

いつどのような形で使用されたかを含めて紹介を行った。

2.3　3 日目

前日に行った数列の和によるπの計算をコンピュータで行うことを目的とした。前半では，Σを用いた数列の和をプログラミングにより計算するために，BASIC 言語の基本的な使い方を説明した後，実際にグレゴリー・ライプニッツの公式を計算するプログラムを作成し，指定した項数の和を出力できるようにした。後半では，より精度の高い計算を行うためにLinux で動作する計算ソフトPari/GP の使用法を説明した後，このソフトでマチンの公式により1000 桁以上のπの値を計算した。

・BASIC を用いたグレゴリー・ライプニッツの公式の計算

まず，2 つのサンプルプログラムによりBASIC の基本を説明した。1 つめのプログラムでは，数値のキーボードからの入力法，計算結果の格納法及び画面への出力法を説明した。それに加え，プログラムの入力，実行方法についても説明した。プログラムの入力は生徒一人一人に行わせたが，キーボードに不慣れな生徒がいたこと，テキストで半角文字と全角文字の見分けがつかなかったことから，予定（10 分間）の2 倍以上の時間がかかってしまった。2 つめのプログラムではFOR 文を用いたループ処理を説明した。また，これを用いてΣを用いて表された数列の和を計算する練習問題を出したが，前の例題と同様，入力に手間取った生徒は与えられたサンプルプログラムの入力と実行を行うので精いっぱいだった。

次に，2 つめのサンプルプログラムをもとに，グレゴリー・ライプニッツの公式の級数を，指定した項数分だけ計算するプログラムを作成させ，結果をまとめさせた。結果の例を表 4 に示す。計算に必要な計算時間は項数に比例する。10,000,000 項の計算には 10 秒程度かかっていたので，100,000,000 項の計算にはその 10 倍程度の時間がかかることが予想されるという説明をした。

表4.　グレゴリー・ライプニッツの公式の項数と計算結果

項数	πの近似値
1	4
10	3.04183961
100	3.13159290
1000	3.14059265
10000	3.14149265
100000	3.14158265
1000000	3.14159255
10000000	3.14159264

・Pari/GP を用いたマチンの公式の計算

BASIC では実数計算の有効数字は 15 桁程度となる。それよりも高精度の計算を行うためには，特別なソフトウェアが必要となることを説明し，その一つとしてLinux で動作するPari/GP を紹介した。配布したCD を用いてLinux を起動し, Pari/GP を実行する方法を説明, 実行後, Pari/GP の基本的な使い方を実習を交えて説明した。

前日の実験の結果，マチンの公式でπの値を1000 桁求めるには750 項の加算が必要となることがわかっていたので，Pari/GP でその和を計算することによりπの値を求めた。計算の正しさは，予め配布してあったπの5000 桁のプリントとの比較，Pari/GP に組み込まれている正しいπの値と計算結果との差の評価により行った。計算されたπの値，および，正しいπと計算値との差は図 3 のようになる。なお，図においては黒字が入力した文字列，赤字が計算結果となっている。

```
(09:17) gp > sum(i=0,750,(-1.0)^i/(2*i+1)*(16/5^(2*i+1)-4/239^(2*i+1)))
%6 = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062
86208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481
11745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378
67831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063
15588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941
51160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188
57527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609
43702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757
78960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212
90219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160
96318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587
53320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185
778053217122680661300192787661119590921642019894
(09:18) gp > sum(i=0,750,(-1.0)^i/(2*i+1)*(16/5^(2*i+1)-4/239^(2*i+1)))-Pi
%7 = 0.E-1011
```

図 3.　Pari/GP 計算された π1000 桁と，その正値との差

この日の実験の様子を図 4 に示す。

図 4.　3 日目の実験の様子

・3 日間のまとめ

最後に全体のまとめとして次のような話をした。

3 日間にわたって，ほぼ歴史の順番に従った方法で π の値を計算してきた。4000 年前には 2 桁程度しか知られていなかった π の値が，現在は 5 兆桁も知られるようになり，その桁数はさらに増加している。より詳しく π の値を知ることは数学者にとっては興味深い問題かもしれないが，私たちの生活に役立つとは思えない。しかし，5 兆桁を計算するために考えられてきた計算手法は間違いなく数学を発展させてきたし，さらにコンピュータの発展により過去には不可能であった様々な計算ができるようになってきている。これらが間接的に私たちの生活の役に立っていることは間違いないと思われる。

3. アンケート結果とまとめ

講座後，生徒にアンケートを記入してもらった。講座がおもしろかったか，講座の内容が理解できたかの問いに対しては，6 割程度の生徒が肯定的な回答をした。これは期待していた数値より若干低め

であった。講座の内容が数学的だったこと，いくつか手を動かす実験は行ったが最終的にその結果をまとめるために多くの計算を行わなければならなかったことがその原因であると考えられる。

実際に 3 日間の講座を行ってみて，内容の構成のしかたをもう少し工夫するべきだったと感じている。理系科目の場合，その内容は積み上げ式で，初めに学習した基礎を理解したうえで初めて応用的な事項を扱うことができる。今回の講座も同じ発想で構成を決めたため，基礎を確認するための説明，実習に予想以上に時間を要した場合，楽しませせようと用意していた応用問題を割愛せざるを得なかった。例えば 3 日目の最後に，すでに計算されている 2 億桁の π の値の中から，自分の誕生日，規則的な配列などを探す実験を行う予定であったが，実際には行うことができなかった。生徒の理解度を上げるための基礎から応用へ向かう道筋と，生徒の興味を引くための応用から基礎へと戻る道筋のバランスを考えて内容を検討しなければならないと思われる。

参考文献

（独）科学技術振興機構(2011), 「サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト(SPP) ／理数系教員指導力向上研修」<http://spp.jst.go.jp/>

ジャン=ポール・ドゥラエ（著），畑政義（訳）(2001),『π—魅惑の数—』，朝倉書店，東京

吉田武(2000), 『虚数の情緒』，東海大学出版会，東京

（受付 : 2012 年 1 月 31 日，受理 : 2012 年 2 月 28 日）