メビウスの帯と曲面の性質

—現代数学の魅力を直観する—

Möbius Band and its Topological Properties

—— An Intuitive Approach to Modern Mathematics ——

泊　佳歩[1]，石田　裕也[1]，サバウ・ソリン[1]，下野　哲雄[1]
佐藤　賢二[2]，田辺　統久[2]，運上　喬仁[2]
Kaho Tomari[3], Yuya Ishida[3], Sabau Sorin[3], Tetsuo Shimono[3]
Kenji Sato[4], Munehisa Tanabe[4], Takahito Unjo[4]

要　旨

今の高校生にとって数式で表現されている数学の抽象的な概念を理解するのは難しく，数学を敬遠する理由となっている。特に，現代数学の重要な位置を占めている位相幾何学を数式で理解することは至難の技である。そこで，メビウスの帯を実際に作りながらその数学的な性質を直感的に理解し，現代数学の魅力を感じてもらう講座を展開した。

Abstract

It is known that due to the apparent difficulty of abstract formulas used in the teaching of mathematics at the high school level, many students avoid choosing mathematics as their favorite subject. For example, one of the most difficult subjects is topology and related topics. We report here an educational project that aims to appeal the attractiveness of the modern mathematics by teaching the geometrical properties of the Möbius band without any mathematical concepts but only using intuitive methods.

キーワード：メビウスの帯，教育論文，現代数学
Keywords: Möbius band, mathematical education, modern mathematics

1. 講座

数学的には向き付け不可能（表と裏の区別をつけることができない）という性質を持つ(Rees, 1988)メビウスの帯の特徴を数式で理解することは難しい。そこで，今回の講座は，メビウスの帯を用いて 3 次元空間に埋め込まれている曲面の性質や，実際の実験での結果による比較を通じて，曲面や向き付け不可能性を直観的に理解してもらうこと，そして様々な課題や実験を，想像力やチームワークで乗り切ることを最終的な目的としている。対象となった生徒は東海大学付属第四高校（札幌市）の 1 年生で，5 人 1 グループとして 5 グループの計 25 人が参加した。講座日数は三日間（各 90 分）でそれぞれ授業，実験，発表を行った。

[1] 東海大学生物理工学部生体機能科学科，005-8601 札幌市南区南沢 5 条 1 丁目 1-1
[2] 東海大学付属第四高等学校， 005-8602 札幌市南区南沢 517-1-1
[3] Department of Human Science and Informatics, School of Biological Science and Engineering, 5-1-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo 005-8601, Japan
[4] Tokai University Dai-yon High School, 517-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo 005-8602, Japan

まず，メビウスの帯について記述する。メビウスの帯（メビウスのおび，Möbius strip, Möbius band），またはメビウスの輪（メビウスのわ，Möbius loop）は，帯状の長方形の片方の端を 180° ねじり，他方の端に貼り合わせた形状の図形（曲面）である。これは，Pickover (2006)によると，数学的には向き付け不可能性（表と裏の区別をつけることができないという性質(日本数学会, 2007)）という特徴を持ち，その形状が化学や工学などに応用されているほか，芸術や文学において題材として取り上げられることもある。また，その帯は循環や再生を想起させることから，図 1 のブラジルをはじめオランダ・ベルギーなどでも切手に描かれているほか，図 2 のようにリサイクルのシンボルマークとして採用されているなど，メビウスの帯をあしらったデザインは多い。

図 1：ブラジルの切手

図 2：リサイクルマーク

本講座では, ねじり回数や長さの違うメビウスの帯を使用するため, 以後ねじる回数を m(180 度ねじりを m=1 とする)，長さを 1 として表す。

次に，この講座の事前準備について記述する。本講座では主に実際に実験をして結果，考察を得るため，講座の流れの説明の他はあえて予備知識や使用する式などは与えず，各受講者が感じ発見した事を書き込めるように授業で使うテキストを作成した。さらに，よりメビウスの帯に興味を持たせるため，運動靴の紐の結び方，作曲家バッハのクラブカノンの楽譜，動画などメビウスの帯が応用されている例を用意した。実験材料として各グループに糊，ハサミ，幅 57.2 mm 直径 64 mm 穴径 12 mm のロールペーパーを用意した。また，あらかじめ使用するねじり回数の違うメビウスの帯も作成した。1 本のメビウス帯の長さはおよそ 80 cm で作成した。次に，本講座について実際に行った授業と生徒の反応を日別で記述する。

1.1　一日目

一日目の目標は，メビウスの帯という存在への興味，関心を持ってもらい，そして性質の不思議さの体験である。まず，冒頭実験として，ねじられた帯（親帯）の紹介を行い，あらかじめ用意しておいた $m = 0, 1, 2$ のメビウス帯を 3 グループの代表者が帯の中心に沿ってハサミで切り(図 1)，得られた帯の違いをもとに，向き付けられる曲面と向き付けられない曲面の説明を行った。「向き付け」とは，ベクトル空間の順序付き組に対し「正」の向きまたは「負」の向きを指定する規約のことである([5])。最後に，各班 $m = 0$ から 3 のメビウスの帯を作成し，裏面，表面，端に異なる色で線を入れる作業をしてもらった。両端に異なる色で線を引く作業を通して向き付け不可能性を直観的に体感してもらい，その結果を発表してもらった。さて，本日の実験の結論から得られた結果は以下の通りである。ただし，端とは空間的な広がりを持つような物体，図形において，その広がりの最も外側を規定する境界付近とする。

定理 1: m (= 奇数) 回のねじりで得られた帯は端を一つしか持たず，一面のみの曲面である。

図１：メビウスの帯作成（左）と端に線を引いている場面（右）

1 日目は，初めてメビウスの帯を目にするという生徒が多かったこともあってか，予想に反する結果に興味を引かれた生徒も少なくなかったのではないかと感じた。

1.2　二日目

二日目の目標は，実際に手を動かすことでより実践的にメビウス帯の多様な性質を体感し，得られた結果から結論を導き出す力を引き出すことである。

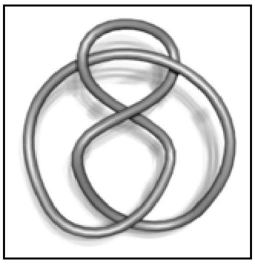
実験 1

各班で m=1 のメビウスの帯を中央で切断してもらい，更にその切断してできた帯（子帯）をもう一回切断した結果を発表してもらい，実験 1 の結果を結論 1 としてまとめ，親帯，子帯の数や状態による違いを記述してもらった。

得られた結論 1 は以下の通りである。

定理 2：m 回ねじれている親帯を中心線に沿って 1 回切った場合，親子帯の性質は以下の通りである。

1) m = 2k のとき，親帯は 2 つの面と 2 つの端を持つ曲面であり，それを中心線にそって一回切ると，m 回ねじれで m/2 回の絡み目[5]をなす親帯と同じ長さの子帯が 2 本得られる。
2) m = 2k+1 のとき，親帯は 1 つの面と 1 つの端を持つ曲面であり，それを中心線に沿って切ると，2m+2 回ねじれている親帯の 2 倍の長さの子帯 1 本を得られるが，これは結び目[5]をなす。



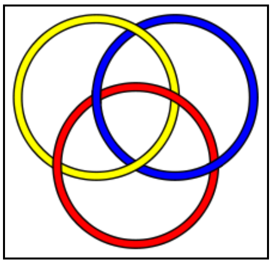


図 2： 結び目[5] (左)，絡み目[5] (右)

[5] 三次元空間の中に浮かぶ 1 つの輪が自身で絡み合っている物を結び目，二つ以上の結び目がたがいに絡まりあったものを絡み目と呼ぶ（メビウスの帯，2011)

実験 2

m ＝ 1, 3 のメビウスの帯を端から 1/3 の線で切断し，切る回数と切る場所による子帯の数や状態の違いを結論 2 としてまとめた。結論 2 は以下の通りである。

m = 1：2 倍の長さ×1 本 (m = 4)，1 倍の長さ×1 本（m = 1）
m = 3：2 倍の長さ×1 本 (m = 6)，1 倍の長さ×1 本（m = 3）
*m ＝ 偶数 の場合，曲面は向き付け可能なため 1/3 で切断しても中央線で切断しても同じ結果が出る。

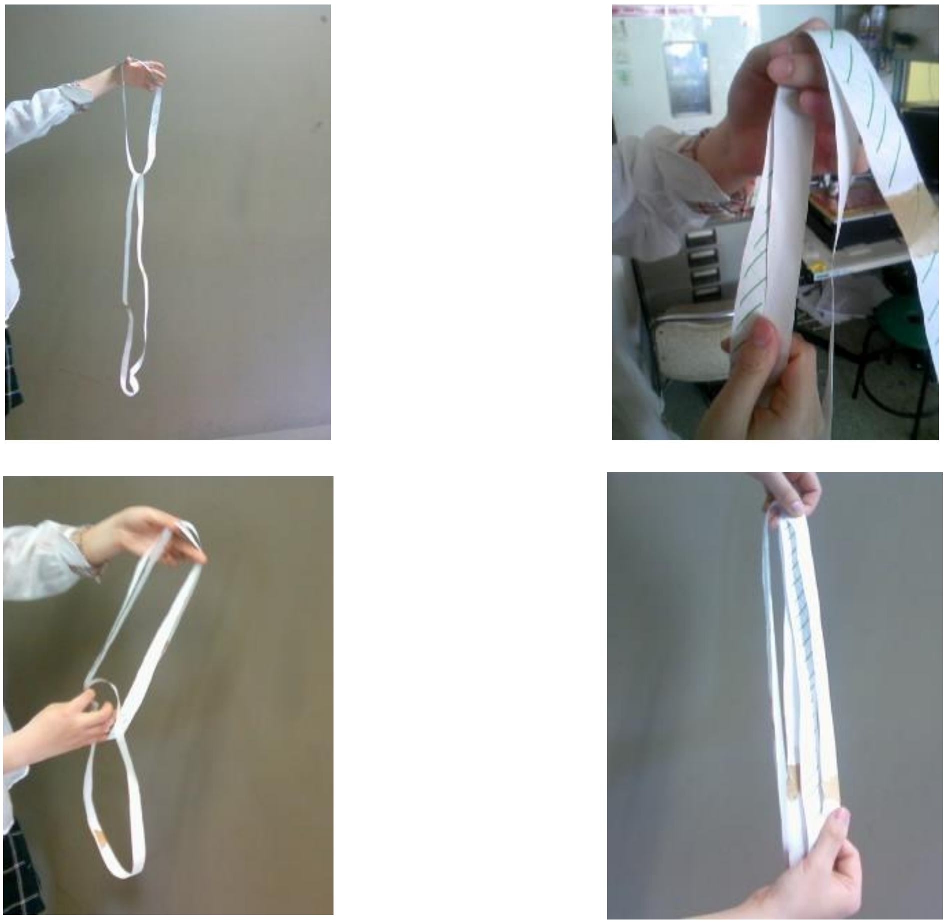


図 3-1 (左上)，図 3-2 (右上)，図 3-3 (左下)，図 3-4 (右下)

最後に、実験 2 で得られた m ＝ 1 を 1/3 の線で切断して得られた子帯を 1 本の帯に束ねられるという事をたしかめ，2 日目は終了した。

また，束ね方は以下の通りである。

1: m = 1，1 倍の長さの帯に色を付け，図 3-1 のように持つ
2: 図 3-2 のように色を付けた帯に 2 倍の長さの帯を重ね合わせていく（図 3-3 のように色のついた帯が中心になるように重ね合わせていく）
3: 図 3-4 のように束ねる

図 4：m = 8 を中央線で切断してできた小帯(左)，1/3 線で切断している様子(右)

二日目は，実験では班で協力して進んで取り組む姿が見られた。だが，結論をまとめる場面では，m の数を見つける事やそれをまとめるのに苦労しており，作業がはかどらなかった様子も見受けられた。二日目の講義の様子を図 4 として示す。

1.3 三日目

3 日目の目標は，2 日間の結果から法則を見つけ出し，より深い理解をさせる事で，現代数学の魅力を直観的に感じてもらうことである。

実験 4

あらかじめテキストに載せてある表に，これまでの結果と実験により，直観的に予想される結果と，実際に実験を通して得られる結果と関係を表にまとめてもらう作業を班別で行い，その結果を基に結論をまとめる作業を行った。ここで，切断の数とは切断場所の指定に沿って同じ切断を行う数のことである。(例えば，切断の数が 2，切断場所が中心線の場合，一回目切断して出来たものにもう一度中心線で切断を行うことになる。)

また，今回の切断の際のルールは以下の通りである。

･切断は 1 つのハサミで順番に行うこと
･端から 1/3 の切断を行う場合，先に 1/3 の線を帯状に引き，ハサミを入れた後は切り始めの場所に戻るまでハサミを離さず切り続けること
･切断の数が 1 以上かつ切断の後子帯が 2 本以上の場合，切断するのは基本どちらでも同じ結果がでるが, 1/3 で切断する場合, m=2k の帯では切断が不可能(結論 2 を参照)なため､m=2k+1 の帯を切断すること

次に，表 1 の結果を基に結論をまとめた。結論は以下の通りである。

m = 奇数回のねじりの数と切断の数が同じでも，切る場所も結果に影響する。
　○中心線に沿って切る場合。
　○それ以外の位置で切る場合。(このとき, どんな切り方をしても結果は変わらない)

表 1：180 度ねじりの数，切断の数，切断場所と出てくる形状の関係

半回転の数	切断の数	切断場所	実際の結果（本数）
1	1	中心線	長さ 2 倍の m=4（1 本）
1	1	端から 1/3	長さ 2 倍の m=4(1 本),m=1(1 本)
1	2	中心線	長さ 2 倍の m=4(2 本)
1	2	端から 1/3	長さ 2 倍の m=4(2 本),m=1(1 本)
1	3	中心線	長さ 2 倍の m=4(1 本)
1	3	端から 1/3	長さ 2 倍の m=4(3 本),m=1(本)
2	1	中心線	m=2(2 本)
2	2	中心線	m=2(3 本)
2	3	中心線	m=2(4 本)
3	1	中心線	長さ 2 倍の m=8(1 本)
3	1	端から 1/3	長さ 2 倍の m=6(1 本),m=3(1 本)
3	2	中心線	長さ 2 倍の m=8(2 本)
4	1	中心線	m=4(2 本)
4	2	中心線	m=4(3 本)

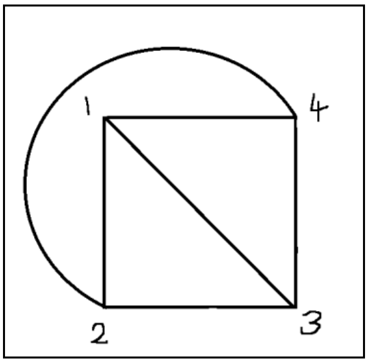
実験 5

1） 平面上の多角形に対して，頂点すべてを交差しない線（直線でなくても良い）で結ぶことができる頂点の最大数を，頂点の数が 2~5 点について，実験的に求める。

（答：4 点）

2） 同様にメビウスの帯の上での最大数を求める。ただし，多角形がメビウスの帯の中に存在すると仮定する。

（答：6 点・答えは一意的ではないので，２つの異なる解を探す）



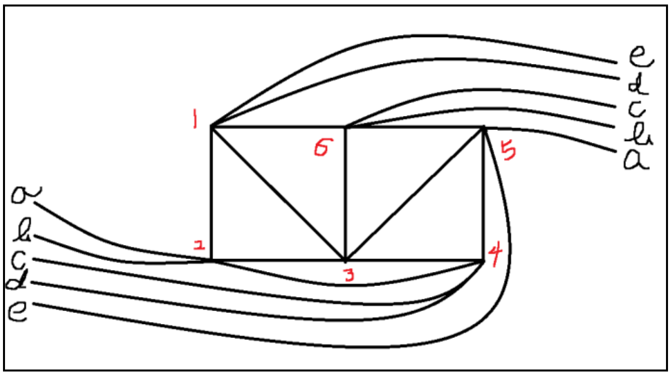


図 5： 実験 5 の 1) 解答例(左)，2) 解答例(右)

最後に，メビウスの帯のアイディアから作曲されたというバッハのクラブカノン[6]の動画をスクリーンで流し，アンケートを記入してもらい，講座は終了した。

6 逆行しても音楽として成り立ち，正行逆行の二重奏もできる音楽(josleys, 2009)

3 日目は，手を動かす実践型の実験は少なかったためか，生徒の反応は良いものばかりではなく，退屈している様子も見られた。実際に表を埋める段階では，結果はわかるもののうまく文章がまとめられないという場面が多く見られた。だが，その後の実験５，映像には意欲，興味をもって取り組む姿も見られ，好感触を得られた。

2. 結果

講座後記入してもらったアンケートによると，24%の生徒が「興味がわいた」，48%の生徒が「少し興味がわいた」という回答で，感想文に関しても，「だいたいのやり方や説明がわかりやすく，すぐにわかった。 けど，少し計算のやり方が難しかった。」，「知らなかったことがたくさんわかって楽しかった。 実験は，少し大変だったけどおもしろかった。 最後の計算はちょっと難しくてあんまりよく分からなかった… 。」など，やはり最終日の講義内容は難しかったようだが，「授業を受講して，数学に対する興味や関心は以前に比べ，どのように変化したか」という問いかけに対しては，68%以上の生徒が「興味，関心度が少し増加した」と回答したことから，講座に対して好ましい結果を得られたのではないかと感じた。そのほか，「メビウスの帯は本当に不思議なものだなと思った。実験して見てわかったこともたくさんあったけど身近なところにも存在しているということを知ってびっくりした。」，「理解するのが難しいところもあったけれど，いろいろな実験ができておもしろかった。実験があったからここまで考えられることができたと思う。」など，実験に対する高評価も多く見られ，この 3 日間の講義を通して少なからず生徒が現代数学の面白みをわかってくれたのではと思う。しかし，「理解が出来なかった」，「難しく感じた」と考える生徒が少数でもいる限り，講義に対しての課題はつきない。

謝　辞

最後に，ご協力頂きました全ての関係者の皆様に，深く感謝いたします。

参考文献

josleys (2009), “J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip,” YouTube ウェブサイト
<http://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU>

メビウスの帯 (2011), Wikipedia ウェブサイト<http://ja.wikipedia.org/wiki/メビウスの帯>，採録 2011 年 3 月

日本数学会編 (2007),『岩波数学辞典第 4 版』, 岩波書店

Pickover, Clifford A. (2006), *The Mobius Strip*, Thunder’s Mouth Press, New York

Rees, Elman G. (1988)（三村護・訳，1992），『幾何学講義』, 共立出版株式会社

（受付：2010 年 12 月 3 日，受理：2011 年 2 月 24 日）