

サイコロ実験から中心極限定理を理解する

A Dice Experiment Based Understanding of the Central Limit Theorem

太田 絵美¹, 木村 翔¹, サバウ・ソリン¹, 下野 哲雄¹

佐藤 賢二², 石原 信夫², 木野 勝史², 青柳 洋一²

Emi Ota³, Syo Kimura³, Sabau Sorin³, Tetsuo Shimono³

Kenji Sato⁴, Nobuo Ishihara⁴, Satoshi Kino⁴, Youichi Aoyagi⁴

要 旨

統計学は日本の高校生が最も不得意とする数学系の分野の1つである。その理由として、ほとんどの基本的な概念が複雑な説明、定義、公式によって導入されているからである。SPPによって、統計学の基礎を直感的に導入できるよう高校生のための授業を行った。そして、サイコロの実験を通して中心極限定理の理解を目指した。

Abstract

Statistics is one of the mathematical disciplines most disliked by the high school students in Japan. The reason is that all basic concepts are introduced through quite complicated explanations, definitions, and formulas. In the SPP program, we have organized a series of classes for high school students with the purpose of an intuitive introduction of basic statistical notions. Finally, through a dice experiment we aimed for an intuitive argument and understanding of the Central Limit Theorem.

キーワード：サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト、二項分布、正規分布、中心極限定理

Keywords: SPP(Science Partnership Project), Binomial Distribution, Normal Distribution, Central Limit Theorem

1. SPP とは

SPP (サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト) とは児童生徒の科学技術、理科、数学に対する興味・関心と知的探究心等を育成するとともに、進路意識の醸成及び分厚い科学技術関係人材層の形成を目的として、学校等と大学・科学館等との連携により、科学技術、理科、数学に関する観察、実験、実習等の体験的・問題解決的な学習活動を支援する JST 主管のプ

¹ 東海大学生物理工学部生体機能科学科, 005-8601 札幌市南区南沢 5 条 1 丁目 1-1

² 東海大学附属第四高等学校, 005-8602 札幌市南区南沢 517-1-1

³ Department of Human Science and Informatics, School of Biological Science and Engineering, Tokai University, 5-1-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo 005-8601, Japan

⁴ Tokai University Dai-yon High School, 517-1-1 Minamisawa, Minami-ku, Sapporo 005-8602, Japan

プロジェクトである（(独) 科学技術振興機構, 2009）。

2. 講座

今回の講座は、サイコロを用いて中心極限定理を学び、日常生活で存在している統計データの信憑性や定理を生徒に理解させることが目的である。対象となった生徒は東海大学附属第四高校（札幌市）の2年生で、計23人が参加した。講座日数は三日間（各1.5時間）それぞれ授業、実験、発表を行った。

まず、生徒に行わせた実験の流れを記述する。使用するデータの取得方法は、A～Fの番号をつけたサイコロ6個をそれぞれ240回振り、出た目を記録する。各回のA～Fに出た目の総和を計算する。この作業を240回目まで繰り返して、240個のデータを得る（表1参照）。

表1 サイコロ実験のデータの記録例

サイコロ 試行回数	A	B	C	D	E	F	総和
1	2	5	6	2	2	4	21
2	3	3	1	5	4	1	17
3	6	2	1	6	3	5	23
4	6	5	4	3	6	3	27
240	6	6	6	6	6	6	36

出た目が全て1ならば総和は6、出た目が全て6ならば総和は36、よって総和の範囲は6～36と定まる。ベルヌーイ試行の二項分布は、 n が大きい時、正規分布 $N(\mu, \sigma)$ に近似されるというラプラスの極限定理によって総和の平均値は21となる。ここで、結果が成功（確率 p ）か失敗（確率 q ）のいずれかである実験を n 回試行したとき、 k 回成功する確率は $P(k) = {}_n C_k q^{n-k} p^k$, $q + p = 1$ で表される。確率をすべての可能な k に関して得たとき、その全体の確率分布を二項分布という（吉田, 2006）。従って総和のヒストグラムを作ると、総和が21の場合が最大頻度となることが期待される。ここで、標準偏差 σ は $\sigma = \sqrt{nqp}$ より4.18となり、総和・平均値・標準偏差をガウス関数に代入した数値から正規分布を作成する。一方、ある試行回数までの6個のサイコロの目の総和の出現頻度を調べ、それを試行回数で割ることで、それぞれの出現確率を得る。なお実際の実験では実験結果の収束を見るために試行回数が30回、60回、120回、240回の4つの場合を設定した。

次に、事前準備について記述する。授業で使用するテキストを作成し、内容としては二項展開、二項分布、正規分布、中心極限定理が主な項目である。項目ごとに課題を1つずつ設け、その課題を行うにあたって基準となる操作方法を記載した手引きを作成した。さらに実験で使用する表計算ソフトのテンプレートを作成した。その内容は、集計したサイコロの出た目を入力し自動的に総和を出力するもの、与えられた数値を入力するとヒストグラムを自動的に出力

するもの(課題1, 2で使用), サイコロの出た目の総和を入力することで自動的に実験結果のヒストグラムと正規分布を出力するもの(課題3, 4で使用)である。発表用のプレゼンテーションのテンプレートも作成した。以下, SPP 講座の授業を日別で記述する。

2.1 講座一日目

まず, ベルヌーイ試行の話から講義が始まった。

課題1: 1個のサイコロを連続して2回投げた時出た目の数字の和を X とする。 X の確率のグラフ(ヒストグラム)を作りなさい。

課題1の確率だけを計算してもらい, 確率の和はいかなる時も“1”になることを説明した。次に, 二項展開について説明し, 二項分布では成功する確率 p , 失敗する確率 q を式に代入した。具体例としてコインやサイコロの事象を説明した。

課題2: 1個のサイコロを連続して10回投げるとき, 1の目が出る回数を X とする。 X の確率を求め, その確率のグラフ(ヒストグラム)を書きなさい。

課題2については成功する回数0回~10回までの計算方法を式に数値を代入して説明した。そして, 二項分布の期待値 μ と標準偏差 σ の式を説明してから, 正規分布の特徴や中心極限定理を説明した。

課題3: 表計算ソフトのテンプレートを用いて, サイコロを30回と60回投げた場合の実験結果のヒストグラムを書きなさい。そして, 正規分布と $N(\mu, \sigma)$ を比較しなさい。ここで μ と σ は, それぞれ標本の平均値と標準偏差である。

課題4: 表計算ソフトのテンプレートを用いて, サイコロを120回と240回投げた場合の実験結果のヒストグラムを書きなさい。そして, 正規分布と $N(\mu, \sigma)$ を比較しなさい。ここで μ と σ は, それぞれ標本の平均値と標準偏差である。



図1 講義の様子

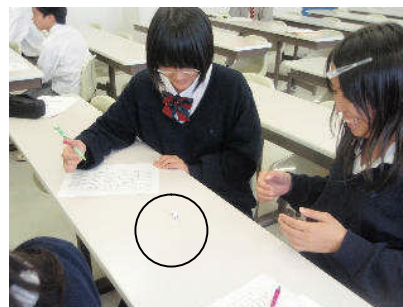


図2 サイコロを振っている場面

課題 3, 4 は考え方を説明し, 二日目にさらに詳しく解説すると生徒に伝えた。ここでテキストを使用した講義が終わり, 実験にサイコロの出た目の総和を得るために生徒にサイコロを投げてもらい, 出た目をプリントに記入させた。講義の様子を図 1 に, 生徒が作業する様子を図 2 に示す。

2.2 講座二日目

まず, 生徒 6 人が構成する 4 つのグループに分かれてもらい, 一日目に集めたサイコロの出た目を表計算ソフトのテンプレートに入力するよう指示した。テンプレートより総和が自動的に出力されるので, USB メモリへ保存させた。次に, 課題 3, 4 についてホワイトボードで図を用いて定理を詳しく説明し, 各グループの作業を下記のように分担させた。

グループ 1: 課題 1 の担当として, 一日目に計算で出した“確率の数値”を表計算ソフトのテンプレートに入力してヒストグラムを作成する。

グループ 2: 課題 2 の担当として, 一日目に説明した計算方法や考え方をヒントに“成功する確率”, “失敗する確率”, “試行回数”, “成功した回数の範囲”を表計算ソフトのテンプレートに入力してヒストグラムを作成する。

グループ 3: 課題 3 の担当として, サイコロの出た目の総和を表計算ソフトのテンプレートに入力し, 30 回と 60 回投げた場合の実験結果のヒストグラムを正規分布の図と共に出力する。

グループ 4: 課題 4 の担当として, サイコロの出た目の総和を表計算ソフトのテンプレートに入力し, 120 回と 240 回投げた場合の実験結果のヒストグラムを正規分布の図と共に出力する。今回の実験で得られた結果を図 3, 4 に示す。生徒が課題に取り込む様子を図 5 に示す。

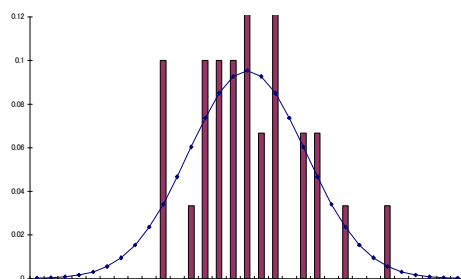


図 3 30 回投げた場合のヒストグラム

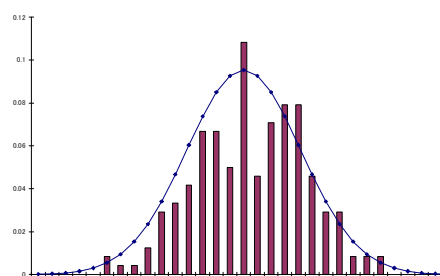


図 4 240 回投げた場合のヒストグラム



図 5 課題に取り組む様子



図 6 プレゼンテーションの作成の様子

全ての課題が終了した時点で、ヒストグラムを解析し、わかったことや気づいたことをプレゼンテーションのテンプレートに発表用としてまとめるよう指示した。テンプレートはあくまで参考用であることを周知し、生徒には、自由に装飾をさせ、主体的に講義に参加していることを体験できるようにした。プレゼンテーションを作成する様子を図 6 に示す。

2.3 講座三日目

二日目に作成したプレゼンテーションの訂正や手直しをさせた後、順番に発表してもらった。1 グループ当たり 15 分が持ち時間で、発表タイムと質問タイム（各グループから1つずつと指導教員から1つ）を設けた。生徒によるプレゼンテーションの様子を図 7 に示す。

グループ 1: ベルヌーイ分布のヒストグラムの解析を行い、「今回得られた図は連続的ではないため、正規分布ではない。全ての確率の和が 1 になる。したがって二項分布である」と理解を深めていた。

グループ 2: 二項分布のヒストグラムの解析を行い、「同じ目が 4 回以上連続で出た場合、不自然である。二項展開の式で計算した数値を並べると正規分布のような配列が考えられ、その数値に確率をかけて得られる分布図は左右対称ではなく頂点が右側か左側に偏る」と発表した。「パスカルの三角形」という定理の名前まではわからなくとも、この実験で自らパスカルの三角形の帰納的な関係を導き出せたことは大変大きな成果であった。

グループ 3: サイコロを 30 回と 60 回投げた場合の実験結果のヒストグラムと正規分布を比較し、「データの回数が多い方が正規分布に近づいていることがわかり、数を重ねているデータこそ信用の出来るデータである」と定義した。さらに「東大志望の生徒と一般の大学を志望する生徒で同じ模試を行った場合、どんな分布が得られるか」という疑問を持ち、「東大志望の生徒は成績が良いので分布の右側(80~100 点)に集中するであろう」と予測していた。プレゼンテーションで用いた図では東大志望の生徒と一般の大学の志望する生徒の分布の高さが同じであり、多少間違っていたが、統計学をより理解したいという着目点を自ら示したという意味で大きな成果があった。

グループ 4: サイコロを 120 回と 240 回投げた場合の実験結果のヒストグラムと正規分布を比較し、「正規分布に近づいていない結果のところは投げ方や状況による誤差が原因である。より良い結果を出すには千、万単位で集計する必要がある」と述べ、中心極限定理についてよい理解を示していた。講座のまとめの様子を図 8 に示す。



図 7 生徒によるプレゼンテーション



図 8 講座のまとめ

3. 結果

実験後、生徒にアンケートに記入してもらった。今回参加した生徒は文系の生徒と理系の生徒で半々の人数だったため、内容が理解できるか多少不安があったが、アンケート結果では75%以上の生徒が今回の SPP 講座について「理解できた」という回答だった。さらに数学に対しても80%以上の生徒が「受講前より好きになった」もしくは、「受講前から好きだったがより好きになった」という回答であった。大変好ましい結果であり、冒頭で記述した目的の達成に貢献できたのではないかと感じている。感想文には、「最初は難しい話ばかりかと思っていたが、想像よりも分かりやすく、楽しんで授業を受けることができた。また、このような機会があれば、ぜひ参加したいと思った」と向上心が見受けられる回答もあり、3日間の講義を通して少なからず生徒が勉強の面白みをわかってくれたのではないかと思う。しかし、「理解ができなかった」、「難しく感じた」と考える生徒が少数でもいる限り、講義に対しての課題は尽きない。

謝 辞

ご協力頂きました全ての関係者の皆様及び島田英夫・元東海大学教授に、深く感謝致します。

参考文献

(独) 科学技術振興機構 (2009), 「サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト (SPP) /理数系教員指導力向上研修」, <http://spp.jst.go.jp/>
吉田耕作 (2006), 『直感的統計学』, 日経 BP 社, 東京

(受付 : 2009 年 10 月 18 日, 受理 : 2010 年 3 月 4 日)